SUR LE COMPORTEMENT A L'INFINI DE L'ESPÉRANCE DU MAXIMUM DE n VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES SUIVANT TOUTES LA MÊME LOI NORMALE RÉDUITE

Nous avons le résultat suivant:

Théorème. *Soient n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes suivant la même loi normale centrée et réduite, avec $n \geq 2$. Soit Π la fonction de répartition de cette loi. Soit M_n la variable aléatoire égale au maximum des X_i et $E(M_n)$ son espérance. Nous savons que*

$$E(M_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} nx\Pi'(x)\Pi^{n-1}(x)dx.$$

Alors nous avons :

$$(I) \qquad E(M_n) = \int_0^{+\infty} (1 - \Pi^n(x))dx - \int_{-\infty}^0 \Pi^n(x)dx \quad \textit{pour} \quad n \geq 2.$$

$$(II) \qquad 0 \leq \int_{-\infty}^0 \Pi^n(x)dx \leq \sqrt{2\pi}/(n2^n) \quad \textit{pour} \quad n \geq 2.$$

$$(III) \qquad \int_0^{+\infty} (1 - \Pi^n(x))dx \leq \sqrt{2\pi}(\ln(n) + 0.5) \quad \textit{pour} \quad n \geq 2.$$

$$(IV) \qquad \int_0^{+\infty} (1 - \Pi^n(x))dx \geq (1 - e^{-1})\sqrt{\ln(n)} \quad \textit{pour} \quad n \geq 25.$$

En conséquence la suite $(E(M_n))_{n \geq 2}$ est divergente.

(Notons que l'on a aussi $E(M_2) = 1/\sqrt{\pi}$ et $E(M_3) = 1.5/\sqrt{\pi}$.)

Preuve: Nous utilisons les inégalités suivantes (1) et (2), qui s'établissent facilement en étudiant les variations des fonctions considérées sur les intervalles correspondants. Il convient de rappeler que $\Pi'(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

$$\Pi(x) \leq e^{-x^2/2} \quad \text{pour} \quad x \leq 0. \tag{1}$$

$$\Pi(x) \leq 1 - e^{-x^2} \quad \text{pour} \quad x \geq 1.7. \tag{2}$$

Comme on a $\Pi(x) + \Pi(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité (1) implique

$$\Pi(x) \geq 1 - e^{-x^2/2} \quad \text{pour} \quad x \geq 0. \tag{3}$$

D'autre part Π est une fonction strictement croissante de $[0;+\infty[$ dans $[0.5;1[$, donc elle admet une fonction réciproque Π^{-1} de $[0.5;1[$ dans $[0;+\infty[$. De plus, d'apres les tables de la loi normale, si $y \geq 0.96$ alors $\Pi^{-1}(y) \geq 1.7$. En remplacant x par $\Pi^{-1}(y)$ dans (2), nous obtenons

$$\Pi^{-1}(y) \geq \sqrt{-\ln(1-y)} \quad \text{pour} \quad 0.96 \leq y < 1. \tag{4}$$

Maintenant venons en à l'espérance de M_n. Nous posons

$$E_A = \int_{-A}^{A} nx\Pi'(x)\Pi^{n-1}(x)dx \quad \text{pour} \quad A > 0.$$

Nous savons donc que $E(M_n)$ est la limite de E_A quand A tend vers l'infini. Par une intégration par parties, nous obtenons

$$E_A = A\Pi^n(A) + A\Pi^n(-A) - \int_{-A}^{A} \Pi^n(x)dx. \tag{5}$$

Il s'en suit facilement

$$\int_0^A (1-\Pi^n(x))dx - E_A + A(\Pi^n(A)-1) + A\Pi^n(-A) = \int_{-A}^{0} \Pi^n(x)dx. \tag{6}$$

D'apres (1) et (3), nous avons pour $A > 0$

$$0 < A\Pi^n(-A) \leq Ae^{-nA^2/2} \quad \text{et} \quad 0 > A(\Pi^n(A)-1) \geq A((1-e^{-A^2/2})^n - 1).$$

Donc, quand A tend vers l'infini, $A\Pi^n(-A)$ et $A(\Pi^n(A)-1)$ tendent vers 0 et alors (6) devient par passage a la limite

$$\int_0^{+\infty} (1-\Pi^n(x))dx - E(M_n) = \int_{-\infty}^{0} \Pi^n(x)dx. \tag{7}$$

Cette égalité est (I). Pour établir le deuxième point, en utilisant (1) et $\Pi'(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, nous pouvons écrire

$$0 \leq \Pi^n(x) \leq \sqrt{2\pi}\Pi'(x)\Pi^{n-1}(x) \quad \text{pour} \quad x \leq 0. \tag{8}$$

En intégrant (8) sur $]-\infty;0]$ nous obtenons

$$0 \leq \int_{-\infty}^{0} \Pi^n(x)dx \leq (\sqrt{2\pi}/n)[\Pi^n(x)]_{-\infty}^{0}. \tag{9}$$

Comme $\Pi(0) = 1/2$ et $\lim_{-\infty} \Pi(x) = 0$, il est clair que (9) donne (II). Passons au troisième point. Nous avons

$$1 - \Pi^n(x) = (1 - \Pi(x)) \sum_{0 \leq k \leq n-1} \Pi^k(x) \quad \text{pour} \quad x \geq 0. \tag{10}$$

Mais aussi, par (1),

$$1 - \Pi(x) = \Pi(-x) \leq e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}\Pi'(x) \quad \text{pour} \quad x \geq 0. \tag{11}$$

Alors (10) et (11) impliquent

$$1 - \Pi^n(x) \leq \sqrt{2\pi} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \Pi'(x)\Pi^k(x) \quad \text{pour} \quad x \geq 0 \tag{12}$$

et en intégrant (12) sur $[0; +\infty[$ nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} (1 - \Pi^n(x))dx \leq \sqrt{2\pi} \sum_{0 \leq k \leq n-1} [\Pi^{k+1}(x)/(k+1)]_0^{+\infty} \tag{13}$$

ou encore, vu que $\Pi(0) = 1/2$ et $\lim_{+\infty} \Pi(x) = 1$,

$$\int_0^{+\infty} (1 - \Pi^n(x))dx \leq \sqrt{2\pi}(1/2 + \sum_{2 \leq k \leq n} 1/k - \sum_{2 \leq k \leq n} 1/(k2^k)). \tag{14}$$

Sachant que nous avons $\sum_{2 \leq k \leq n} 1/k \leq \ln(n)$ pour $n \geq 2$, nous voyons que (14) implique (III). Montrons maintenant le dernier point. Comme $1 - \Pi^n(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, nous avons pour tout $a > 0$

$$\int_0^{+\infty} (1 - \Pi^n(x))dx \geq \int_0^a (1 - \Pi^n(x))dx. \tag{15}$$

Vu que $1 - \Pi^n(x) \geq 1 - \Pi^n(a)$ pour $0 \leq x \leq a$, (15) implique

$$\int_0^{+\infty} (1 - \Pi^n(x))dx \geq a(1 - \Pi^n(a)). \tag{16}$$

Prenons $a = \Pi^{-1}(e^{-1/n})$, alors (16) s'écrit

$$\int_0^{+\infty} (1 - \Pi^n(x))dx \geq \Pi^{-1}(e^{-1/n})(1 - e^{-1}). \tag{17}$$

Pour $n \geq 25$ nous avons $1 > e^{-1/n} \geq 0.96$, donc par (4) on obtient

$$\Pi^{-1}(e^{-1/n}) \geq \sqrt{-\ln(1 - e^{-1/n})}. \tag{18}$$

Comme $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons aussi

$$-\ln(1 - e^{-1/n}) \geq \ln(n). \tag{19}$$

En combinant (17), (18) et (19) nous obtenons (III). Enfin pour n tendant vers l'infini nous voyons que $\int_0^{+\infty}(1 - \Pi^n(x))dx$ tend vers l'infini par (IV) et aussi $\int_{-\infty}^0 \Pi^n(x)dx$ tend vers 0 par (II) donc $E(M_n)$ tend vers l'infini par (I) et ceci termine la démonstration.

(La dernière assertion s'obtient directement par des méthodes classiques et élémentaires à partir de l'intégrale définissant l'espérance pour $n = 2$ et pour $n = 3$.)